



TITLE:

# 代数曲線のuniversal period と Schottky 問題(整数論:保型形式と関 連する研究)

AUTHOR(S):

市川, 尚志

---

CITATION:

市川, 尚志. 代数曲線のuniversal period と Schottky 問題(整数論:保型形式と関連する研究). 数理解析研究所講究録 1990, 727: 201-214

ISSUE DATE:

1990-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101910>

RIGHT:

## 代数曲線の universal period と Schottky 問題

九大・理 市川尚志 (Takashi Ichikawa)

### 序

Schottky 問題は, Abel 多様体の中から (完備, 非特異) 代数曲線の Jacobi 多様体と同型になるものを特徴づける問題であり, 今まで数多くの研究がなされてきた (van der Geer [4] 参照). 最近の結果としては Novikov 予想の塩田 [10] による解決が著しい. また複素数体上の主偏極 Abel 多様体の同型類は, 周期を対応させることにより, Siegel 上半空間の整 symplectic 群による商空間である Siegel modular 多様体の点として parametrize されるので, この中の Jacobian locus (Jacobi 多様体に対応する点全体の集合) の Zariski 閉包を, いくつかの Siegel modular form の零点集合として表す問題ととらえることもでき, これについても van Geemen [3] のすぐれた結果がある。

さてここでは Schottky 問題として次の問題を考える。

“ Jacobian locus 上で 0 になる Siegel modular form を特徴づけよ ”

我々の結果は, Siegel modular form の Fourier 展開からこの特徴づけを与えるものであり, ここで用いられるのが “代数曲線の乗法的周期の universal な形式中級数表示 (代数曲線の universal period)” である。この結果は, 標数正の体上の Schottky 問題にも同様に適用される。“universal period” は, Manin - Drinfeld [8] による Mumford 曲線の乗法的周期を表す無限積 (同様の式は弦理論において Schottky - 意化された複素数体上の代数曲線についても得られている ([7], p. 224)) を Koebe 座標により整係数中級数に展開して得られる。これはこの座標が代数曲線の moduli 多様体においてよい数論的意味をもつことを示しており, “Teichmüller 空間上の保型形式の整数論” の研究に役立つことが期待される。

### § 1. Mumford 曲線とその周期

ここでは Mumford 曲線とその周期についての, Mumford, Manin - Drinfeld, Gerritzen の結果を復習する。

1.1.  $K$  を完備離散付値体とし,  $R$  をその付値環とする。

この時  $PGL_2(K)$  を  $P'(K)$  に

$$\alpha(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \left( \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bmod K^\times \in PGL_2(K), z \in P'(K) \right)$$

として作用させる。 $\Gamma$  を  $K$  上の Schottky 群, すなわち  $PGL_2(K)$  の有限生成部分群で単位元以外の元がすべて双曲的 (固有値の比が unit ではない) となるものとする。この時  $\Gamma$  は自由群になることが知られている (伊原 [6])。  $g$  を  $\Gamma$  の階数とし,

$$\Omega_P = P'(K) \setminus \{\Gamma \cdot z\}$$

とすると, 商空間  $\Omega_P/\Gamma$  に自然に種数  $g$  をもつ  $K$  上の代数曲線の構造が唯一つ入る (これが Mumford [9] により示されている (より正確に言うと,  $K$  上の解析空間  $\Omega_P/\Gamma$  が唯一つの  $K$  上の代数曲線に付随する解析空間として与えられる)。これを  $\Gamma$  に付随する Mumford 曲線と呼び  $C_P$  で表す。 $C_P$  は  $R$  上 multiplicative reduction をもつ (すなわち  $R$  上 stable reduction をもつ, minimal model の special fiber が  $P^1$  から成る) が, 逆に multiplicative reduction をもつ代数曲線は, ある Schottky 群に付随する Mumford 曲線として得られることも知られている ([9])。

1.2.  $\Gamma$  を  $K$  上の階数  $g$  の Schottky 群とし,  $\gamma_i (1 \leq i \leq g)$

を  $\gamma$  の生成元とする。各  $\gamma_i$  は双曲的なので、Hensel の補題より  $\mathbb{P}'(K)$  の元  $x_i, x_{-i}$  ( $x_i \neq x_{-i}$ ) と  $R$  の極大 ideal の元  $t_i$  があ  
る。

$$(1.2.1) \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} x_i & x_{-i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i & x_{-i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \text{ modulo center}$$

と表される。すなわち  $x_{\pm i}$  は  $\gamma_i$  の固定点で、 $t_i$  は  $R$  に属す  
る  $\gamma_i$  の固有値の比である。  $g$  以下の自然数  $i, j$  に対し、  
 $iP_j$  を  $\Gamma$  の元で  $\gamma$  の被約表示が  $\gamma_k^{\pm 1} \cdot \gamma \cdot \gamma_l^{\pm 1}$  (ただし  $k \neq i$ ,  
 $l \neq j$ ) となるものから成る集合とする。体の異なる 4 つの元  
 $a, b, c, d$  に対し、 $\gamma$  の複比  $[a, b; c, d]$  を

$$[a, b; c, d] = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c}$$

で定義すると、無限積

$$\prod_{\gamma \in iP_j} [x_i, x_{-i}; \gamma(x_j), \gamma(x_{-j})]$$

は  $K^\times$  の中で収束する ( $[ \gamma ]$ )。  $K^\times$  の元  $f_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq g$ ) を

$$(1.2.2) \quad f_{ij} = c_{ij} \cdot \prod_{\gamma \in iP_j} [x_i, x_{-i}; \gamma(x_j), \gamma(x_{-j})]$$

$$\text{ただし } c_{ij} = \begin{cases} [x_i, x_{-i}; x_j, x_{-j}] & (i \neq j) \\ t_i & (i = j) \end{cases}$$

で定義する。この時 Manin-Drinfeld  $[ \gamma ]$  により  $C_p$  の Jacobi

多様体  $J_r$  は  $K$  上の解析空間として商空間

$$(K^*)^g / ((\prod_j g_{ij}^{n_j})_{1 \leq i \leq g} \mid n_j \in \mathbb{Z})$$

で表されることを示されている。  $g_{ij}$  を  $C_r$  の乗法的周期と呼ぶ。

1.3.  $|\cdot|$  を  $K$  の乗法付値とする。  $\mathcal{Q}$  を  $(K \times K \times K)^g$  の元  $u = (x_i, x_{-i}, t_i)_{1 \leq i \leq g}$  で条件

$$x_j \neq x_k (j \neq k), \quad 0 < |t_i| < \min\{1, |[x_j, x_k, x_{-i}, x_i]|(j, k \pm i)\}$$

を満たすものから成る集合とする。この時 Gerritzen [5] により、任意の  $\mathcal{Q}$  の元  $u = (x_i, x_{-i}, t_i)$  に対し、(1.2.1) により定義される  $\gamma_i (1 \leq i \leq g)$  から生成される  $PGL_2(K)$  の部分群は、 $\gamma_i$  を生成元にも  $g$  階数  $g$  の Schottky 群になることが示されている。

## § 2. Universal period

ここからは式 (1.2.2) を、 $x_{\pm i}, t_i$  を変数と見て整係数中級数に展開する。これが "universal period" であるが、それは  $t_i (1 \leq i \leq g)$  を変数とする  $\mathbb{Z}[x_i, 1/(x_j - x_k)]$  ( $i, j, k \in \{\pm 1, \dots, \pm g\}$ ),

ただし  $j \neq k$ ) 上の形式中級数環

$$A = \left( \mathbb{Z} \left[ x_i, \frac{1}{x_j - x_k} \right] \right) [[t_1, \dots, t_g]]$$

の元として与えられる。(1.2.2)が  $A$  の元として表されるというのは一見予想がしにくいが, Mumford 曲線が  $\Omega$  の各元に対して定まるので, その乗法的周期が  $\Omega$  上の解析関数として与えられるはずであると考えれば意外ではない。以下の計算により  $g_{ij}$  が  $A$  に属することがわかるだけでなく, それを具体的に求めることもできる。

2.1.  $g$  を自然数,  $x_i, x_{\pm i}, t_i$  ( $1 \leq i \leq g$ ) を変数とし,  $\Omega = \mathbb{C}(x_{\pm i}, t_i)$  とおく。  $\gamma_i$  を (1.2.1) で定義される  $\mathrm{PGL}_2(\Omega)$  の元とし,  $\Gamma$  を  $\gamma_i$  ( $1 \leq i \leq g$ ) から生成される  $\mathrm{PGL}_2(\Omega)$  の部分群とする。  $x_{\pm i}, t_i$  は変数だから  $\Gamma$  は  $\gamma_i$  を生成元とする自由群となる。整数  $k = -g, -g+1, \dots, -1$  に対し  $t_k = t_{-k}$ ,  $\gamma_k = (\gamma_{-k})^{-1}$  とおくと,  $\gamma_k$  も (1.2.1) を満たす。  $\Gamma$  の元  $\gamma$  の被約表示が  $\prod_{p=1}^n \gamma_{\delta(p)}$  ( $\delta(p) \in \{\pm 1, \dots, \pm g\}$ ) とする時,  $n(\gamma) = n$  とおく。  $A$  を上のよりに定め,  $m$  を  $t_i$  ( $1 \leq i \leq g$ ) から生成される  $A$  の ideal とする。この時

2.2 補題.  $\gamma \in \Gamma$ ,  $i = \pm 1, \dots, \pm g$  に対し,

$$\gamma(x_i) \in A.$$

特に  $\gamma \in \gamma_i^2$  ならば,  $\gamma$  の被約表子を  $\gamma_k \cdot \gamma'$  とする時

$$\gamma(x_i) \in x_k + m.$$

証明. まず後半を  $n(r)$  にわたる帰納法で示す.  $\gamma \in \gamma_i^2$  の被約表子を  $\gamma_k \cdot \gamma'$  とし  $\gamma(x_i) = x_k + \alpha$  とする  $\alpha \in m$  があると仮定すると,  $j \neq -k$  の時

$$(\gamma(x_i) - x_{-j})^{-1} = \{ (x_k - x_{-j}) (1 + \alpha / (x_k - x_{-j})) \}^{-1} \in A.$$

よ,  $\gamma$

$$\begin{aligned} (\gamma_j \cdot \gamma)(x_i) &= \left\{ x_j - \frac{(\gamma(x_i) - x_j) x_{-j} t_j}{\gamma(x_i) - x_{-j}} \right\} \left\{ 1 - \frac{(\gamma(x_i) - x_j) t_j}{\gamma(x_i) - x_{-j}} \right\}^{-1} \\ &\in x_j + m. \end{aligned}$$

また  $\gamma \in \gamma_i^2$  の時は  $\gamma(x_i) = x_i$  だから,  $j \neq \pm i$  に対し同様に  $(\gamma_j \cdot \gamma)(x_i) \in x_j + m$ . 前半はこれより明らか.

2.3 補題.  $\gamma \in \Gamma$  の被約表子を  $\gamma' \cdot \gamma_x$  とすると,  $j \neq \pm i$  とする  $j \in \{ \pm 1, \dots, \pm g \}$  に対し

$$\gamma(x_j) - \gamma(x_{-j}) \in m^{n(r)}.$$

証明.  $n(r)$  にわたる帰納法で示す.  $\gamma(x_j) - \gamma(x_{-j}) \in m^{n(r)}$



を仮定する。  $\gamma$  の被約表示を  $\gamma_k \cdot \gamma'$  とすると補題 2.2 より

$\gamma(x_j) = x_k + \beta$  とする  $\beta \in m$  がある。よ、  $\gamma - t_x(\gamma(x_j) - x_x)$

$\in m$ 。従、  $\gamma \neq -k$  の時

$$\begin{aligned} & \{ \gamma(x_j) - x_{-x} - t_x(\gamma(x_j) - x_x) \}^{-1} \\ &= \{ (x_k - x_{-x}) + (\beta - t_x(\gamma(x_j) - x_x)) \}^{-1} \in A. \end{aligned}$$

同様に  $\{ \gamma(x_{-j}) - x_{-x} - t_x(\gamma(x_{-j}) - x_x) \}^{-1} \in A$ 。従、  $\gamma$

$$\begin{aligned} & (\gamma_x \cdot \gamma)(x_j) - (\gamma_x \cdot \gamma)(x_{-j}) \\ &= \frac{(x_x - x_{-x})^2 (\gamma(x_j) - \gamma(x_{-j})) t_x}{\{ \gamma(x_j) - x_{-x} - t_x(\gamma(x_j) - x_x) \} \{ \gamma(x_{-j}) - x_{-x} - t_x(\gamma(x_{-j}) - x_x) \}} \\ &\in m^{n(\gamma)+1}. \end{aligned}$$

2.4 命題.  $\gamma \in \Gamma_f$  に對し

$$[x_i, x_{-i}; \gamma(x_j), \gamma(x_{-j})] \in 1 + m^{n(\gamma)}.$$

証明.  $\gamma$  の被約表示を  $\gamma_k \cdot \gamma'$  とすると、補題 2.2 より

$\gamma(x_j) - x_k, \gamma(x_{-j}) - x_k \in m$ 。よ、  $\gamma \neq \pm i$  より

$$(\gamma(x_j) - x_{-i})^{-1}, (\gamma(x_{-j}) - x_i)^{-1} \in A.$$

従、  $\gamma$  補題 2.3 より

$$\begin{aligned} & [x_i, x_{-i}; \gamma(x_j), \gamma(x_{-j})] \\ &= 1 + \frac{(x_i - x_{-i})(\gamma(x_j) - \gamma(x_{-j}))}{(\gamma(x_j) - x_{-i})(\gamma(x_{-j}) - x_i)} \in 1 + m^{n(\gamma)}. \end{aligned}$$

2.5 定理-定義.  $g$  以下の自然数  $i, j$  に対し, 命題 2.4 より無限積  $\prod_{\gamma \in \Gamma_j} [x_i, x_{-i}; \gamma(x_j), \gamma(x_{-j})]$  は  $A$  の中で収束する.  $A$  の元  $p_{ij}$  を

$$c_{ij} \cdot \prod_{\gamma \in \Gamma_j} [x_i, x_{-i}; \gamma(x_j), \gamma(x_{-j})] \quad (c_{ij}: (1.2.2) \text{ の通り})$$

で定義し, これを

the universal expression of multiplicative periods of algebraic curves

( the universal period of curves )

と呼ぶ. 定義より,  $\mathrm{PGL}_2(\Omega)$  の元  $\gamma_i (1 \leq i \leq g)$  を先備離散付値体  $K$  上の Schottky 群  $\Gamma$  の生成元に specialize する時,  $p_{ij}$  は  $C_r$  の乗法的周期  $q_{ij}$  に specialize される.

2.6. 上式より  $p_{ij}$  を計算することはできる. 例えば

$$(2.6.1) \quad p_{ij} \equiv c_{ij} \pmod{\begin{cases} m & (\text{if } i \neq j) \\ m^2 & (\text{if } i = j) \end{cases}},$$

$$p_{ij} \equiv c_{ij} \cdot \left( 1 + \sum_{\substack{k \in \{1, \dots, g\} \\ |k| \neq i, j}} \frac{(x_i - x_{-i})(x_j - x_{-j})(x_k - x_{-k})^2}{(x_i - x_k)(x_{-i} - x_k)(x_j - x_k)(x_{-j} - x_k)} t_{|k|} \right) \\ \pmod{\begin{cases} m^2 & (\text{if } i \neq j) \\ m^3 & (\text{if } i = j) \end{cases}}.$$

一般に  $t_1, \dots, t_g$  の積の係数になる  $\mathbb{Z}[x_i, 1/(x_j - x_k)]$  の元は,  $x_{\pm 1}, \dots, x_{\pm g}$  から成る複比で生成されることがわかる. この係数を求め,

すなわち  $p_{ij}$  を決定することは、後述する Schottky 問題への応用の上から重要な問題であると思われる。

### § 3. Schottky 問題

ここでは “universal period” を用い、Jacobian locus 上  $\tau = 0$  となる Siegel modular form の特徴づけを与える。

3.1. 自然数  $g$  を固定する。  $k$  を任意の体とし、  $f$  を  $k$  上定義された次数  $g$ 、重  $\pm 2l$  ( $l \in \mathbb{N}$ ) の Siegel modular form, すなわち

$$H^0(\mathcal{X}_g \otimes k, (\wedge^g \pi_* (\Omega_{\mathcal{A}/\mathcal{X}_g}^1))^{\otimes 2l})$$

(ただし  $\mathcal{X}_g$  は次元  $g$  の主偏極 Abelian 多様体の moduli stack (Deligne-Mumford [1]) で、  $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}_g$  は universal abelian scheme を表す) の元とする。  $k = \mathbb{C}$  の時は、これは古典的な Siegel modular form の定義を与える。この時 Faltings [2] より、  $f$  は  $k$  上有理的な Fourier 展開

$$F(f) = \sum_{T=(t_{ij})} a(T) \prod_{i,j=1}^g g_{ij}^{t_{ij}}$$

(  $T$ : 半整非負定値対称行列,  $a(T) \in k$  ) をもつことが知られる。

れている。  $k = \mathbb{C}$  の時は,  $q_{ij} = \exp(2\pi\sqrt{-1} \cdot z_{ij})$  ( $Z = (z_{ij})$  は  $g$  次元 Siegel 上半空間の点) となる。対称性  $q_{ij} = q_{ji}$  より  $F(f)$  は  $k[[q_{ij} (1 \leq i, j \leq g)]]$  に属する。  $M_g$  を種数  $g$  の (定備, 非特異) 代数曲線の moduli stack とし,  $j: M_g \rightarrow \mathcal{X}_g$  を Torelli 写像とする。

3.2 定理.  $A$  は §2 の通りとし,  $f$  は  $k$  上定義された種数  $g$  の Siegel modular form とする。この時,  $j$  による  $f$  の pull back  $j^*(f)$  が 0 になるための必要十分条件は,

$$F(f)|_{q_{ij}=p_{ij}} = 0 \quad \text{in } A \otimes k.$$

証明.  $k$  を代数閉体と仮定してよい。まず  $j^*(f) = 0$  を仮定する。  $k$  上の形式中級数体  $k[[z]]$  を  $z$  を素元とする完備離散付値体と見て,  $\mathcal{Q}$  を 1.3 で定義した  $k[[z]]$  上の解析空間とする。この時仮定より,  $\varphi = F(f)|_{q_{ij}=p_{ij}} \in A \otimes k$  は任意の  $\mathcal{Q}$  の元に対し 0 をとるから, 特に  $x_j \neq x_k$  ( $j \neq k$ ),  $t_i \in (z)k[[z]]$  を満たす任意の  $(x_i, x_{-i}, t_i)_{1 \leq i \leq g} \in (k \times k \times k[[z]])^g$  に対し 0 をとる。  $k$  は無限体だから  $\varphi = 0$ 。

次に  $F(f)|_{q_{ij}=p_{ij}} = 0$  を仮定する。  $\mathcal{V}$  を  $j^*(f) = 0$  で定義される  $M_g \otimes k$  の closed subset とする。  $M_g$  を種数  $g$  の代数曲線の coarse moduli scheme とすると,  $k$  は代数閉体なので,  $\mathcal{V}$  は

$M_g \otimes k$  のある closed subset と同一視される。 Deligne - Mumford [1] により  $M_g \otimes k$  は既約になることが示されているので、 $k$  を含む完備離散付値体  $K$  と  $K$  上の Mumford 曲線  $\mathcal{M}_g$  で  $M_g \otimes k$  の generic point  $\eta$  に対応するものがとれる。よ、7 仮定より  $\mathcal{M} \supset \eta$  となるから  $M_g \otimes k$  の既約性より  $\mathcal{M} = M_g \otimes k$  を得る。これで定理が示された。

3.4 系.  $f$  を  $k$  上定義された次数  $g$  の Siegel modular form で  $j^*(f) = 0$  となるものとする。この時整数  $s_1, \dots, s_g \geq 0$  が存在して

$$F(f) = \sum_{t_{ii} = s_i} a(T) \prod_{i,j=1}^g g_{ij}^{t_{ij}} + \sum_{T_{\mathbb{R}}(T) > \sum s_i} a(T) \prod_{i,j=1}^g g_{ij}^{t_{ij}},$$

ただし

$$\sum_{t_{ii} = s_i} a(T) \prod_{i,j=1}^g [x_i, x_{-i}; x_j, x_{-j}]^{t_{ij}} = 0.$$

証明. (2.6.1) よりただちに従う。

3.5. 与えられた重  $s$  をもつ Siegel modular form のなる空間は有限次元なので、定理 3.2 における条件は十分高い次数までの  $t_i (1 \leq i \leq g)$  の積の係数によって見ればよいが、その次数

$n$  effective 力評価を行ふことは重要な問題かと思われた。

### 文献

1. P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of a given genus, Publ. Math. IHES. 36 (1969) 75-109.
2. G. Faltings, Arithmetische kompaktifizierung des modulraums der abelschen varietäten, in: Proceedings Arbeitstagung (Bonn 1984), Lecture Notes in Math. vol. 1111, pp. 321-383, Springer 1985.
3. B. van Geemen, Siegel modular forms vanishing on the moduli space of curves, Invent. Math. 78 (1984) 329-349.
4. G. van der Geer, The Schottky problem, in: Proceedings Arbeitstagung (Bonn 1984), Lecture Notes in Math. vol. 1111, pp. 385-406, Springer 1985.
5. L. Gerritzen, Zur analytischen Beschreibung des Raumes der Schottky-Mumford-Kurven, Math. Ann. 255 (1981) 259-271.
6. Y. Ihara, On discrete subgroups of the  $2 \times 2$  projective linear group over  $p$ -adic fields, J. Math. Soc. Japan 18 (1966)

219-235.

7. ミチオ・カフ著, 太田信義訳, 「超弦理論」, シュワ  
リニガー・フエアラーク東京, 1989.

8. Yu. I. Manin and V. Drinfeld, Periods of  $p$ -adic Schottky  
groups, J. reine angew. Math. 262/263 (1972) 239-247.

9. D. Mumford, An analytic construction of degenerating  
curves over complete local fields, Comp. Math. 24 (1972) 129-  
174.

10. T. Shiota, Characterization of Jacobian varieties in  
terms of soliton equations, Invent. Math. 83 (1986) 333-382.